**QUIZ 1**

**ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: Καταράκης Δημήτριος**

**ΑΕΜ: 961**

**Άσκηση 1**

**Απαλοιφή Gauss – Βήμα 2:**

Διαιρούμε τη γραμμή 2 με -4.8 και την πολλαπλασιάζουμε με -16.8, δηλαδή την πολ/ζουμε με - 16.8/-4.8= 3.5. Έτσι έχουμε:

([ 0 -4.8 – 1.56] [ -96.208]) \* 3.5 = [0 -16.8 -5.46 ] [-336.728]

Και την αφαιρούμε από την 3η γραμμή , οπότε:

$\left[\begin{matrix}25&5&1\\0&-4.8&-.156\\0&0&0.7\end{matrix}\right]$ $\left[\begin{array}{c}a1\\a2\\a3\end{array}\right]$ = $ \left[\begin{array}{c}106.8\\-96.208\\0.76\end{array}\right]$

**Πίσω αντικατάσταση – Βήμα 3:**

$$25α\_{1}+ 5α\_{2}+α\_{3}=106.8$$

$$ α\_{1}=\frac{106.8-5\*19.6905-1.08571 }{25}$$

$$ α\_{1}=0.290472$$

**Άσκηση 2**

Έστω ότι ο πίνακας Α έχει διαστάσεις nxn. Το κόστος της παραγοντοποίησης LU και ομοίως της απαλοιφής Gauss είναι Ο($n^{3}$) πράξεις. Το κόστος επίλυσης ενός τριγωνικού συστήματος είναι Ο($n^{2}$) πράξεις σωστό είναι το Β γιατί:

Για την επίλυση πολλών συστημάτων Αx= b με ίδιο πίνακα συντελεστών και ίδια δεξιά μέρη b, οι δύο μέθοδοι κοστίζουν Ο($n^{3}$) για την επίλυση του πρώτου μόνο. Όμως η παραγοντοποίηση LU υπολογίζει τα υπόλοιπα συστήματα σε πολύ λιγότερο χρόνο από ότι η μέθοδος Gauss, καθώς ισχύουν οι εξής σχέσεις Αx= b, Ux =c , A =LU , από τις οποίες προκύπτει ότι Ux =c $⟺$ LUx = Lc $⟺$ Ax = Lc $⟺$ Lc = b

Άρα λύνουμε το Lc= b με πράξεις κόστους Ο($n^{2}$) για την τιμή του c και μετά το Ux=c πάλι με ίδιο κόστος για το x. Άρα το συνολικό κόστος είναι πλέον Ο($n^{2}$)+ Ο($n^{2}$) το οποίο είναι σαφέστατα μικρότερο από το κόστος Ο($n^{3}$) της απαλοιφής Gauss για καθένα από τα υπόλοιπα συστήματα.

**Άσκηση 3**

$\left[\begin{array}{c}25 5 4\\10 8 16\\8 12 22\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}1 0 0\\0 1 0\\0 0 0\end{array}\right]$ $⇒$ $\left[\begin{array}{c}25 5 4 \\0 6\frac{72}{5}\\8 12 22\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}1 0 0 \\\frac{2}{5} 1 0\\ 0 0 1\end{array}\right]⇒$ $\left[\begin{array}{c}25 5 4 \\0 6\frac{72}{5}\\0\frac{52}{5}\frac{518}{25}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}1 0 0\\\frac{2}{5}1 0 \\\frac{8}{25} 0 1\end{array}\right]⇒\left[\begin{array}{c}25 5 4 \\0 6 14.4\\0 0-4.24\end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 1 0 0 \\0.4 1 0\\0.32 1.73 1\end{array}\right]$

Οπότε έχουμε τον L = $\left[\begin{array}{c} 1 0 0 \\0.4 1 0\\0.32 1.73 1\end{array}\right]$ σωστή απάντηση λοιπόν το Α.

**Άσκηση 4**

$\left[\begin{array}{c}25 5 4\\0 8 16\\0 12 22\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}1 0 0\\0 1 0\\0 0 0\end{array}\right]$$⇒\left[\begin{array}{c}25 5 4\\0 8 16\\0 0-2\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}1 0 0\\0 1 0\\0\frac{3}{2} 1\end{array}\right]$

Σωστή απάντηση το C .

**Άσκηση 5**

Το κόστος της απαλοιφής Gauss για την εύρεση του αντιστρόφου είναι του $n^{4}$ ενώ το αντίστοιχο κόστος της παραγοντοποίησης LU ανάλογο του 4 x $n^{3}$ . Αν t είναι ο χρόνος για την μία πράξη, τότε έχουμε :

$$\left(\begin{array}{c}4\*n^{3}t=15 sec\\n^{4}t=x sec\end{array}\right)⟹\left(x=\frac{15}{4}n\right)$$

Άρα για n=2000 $⟹$ x= 7500 sec. Σωστό το C.

**Άσκηση 6**

Ισχύουν οι προτάσεις 3 ,4 ,5 .

**Άσκηση 7**

Ο αλγόριθμος που μπορεί να επιλύσει το σύστημα είναι ο Β. Ο Α απορρίπτεται γιατί η εντολή ΄΄for j from 1 to i do΄΄ Κανονικά θα έπρεπε να είναι ΄΄for j from 1 to i-1 do΄΄ . Η Γ απορρίπτεται γιατί το sum δεν μηδενίζεται ποτέ και ο Δ απορρίπτεται λόγω παράληψης ενός βήματος, αυτού της εύρεσης του z1.

**Άσκηση 8**

Ο σκοπός της εμπρός απαλοιφής των βημάτων της απαλοιφής του Gauss είναι η ελάττωση του πίνακα συντελεστών σε ένα (D) άνω τριγωνικό πίνακα.

Σωστό το D).

**Άσκηση 9**

Η διαίρεση με το 0 κατά τη διάρκεια της εμπρός αντικατάστασης στην απαλοιφή του Gauss στη λύση [A][X]=[C] συνεπάγεται ότι ο Α είναι ή ιδιόμορφος, ή μη ιδιόμορφος και θα πρέπει να γίνει απαλοιφή με μερική οδήγηση, δηλαδή εναλλαγή γραμμών για να συνεχιστεί η απαλοιφή. Οπότε δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε με ακρίβεια τις ιδιότητες του Α. Σωστή απάντηση το (C).

**Άσκηση 10**

**Απαλοιφή:**

$\left[\begin{array}{c}0.003 55.23\\6.239-7.123\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}x\_{1}\\x\_{2}\end{array}\right]$ **=** $\left[\begin{array}{c}58.12\\47.23\end{array}\right]$$⇒\left[\begin{array}{c}0.003 55.23\\0 -114830\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}x\_{1}\\x\_{2}\end{array}\right]$**=**$\left[\begin{array}{c}58.12\\-120784\end{array}\right]$

**Πίσω αντικατάσταση:**

**Βήμα 1ο :** $-114830\*x\_{2}= -120784$ άρα $x\_{2}=1.051$

**Βήμα 2ο :** $0.003x\_{1}+55.23x\_{2}= 58.12$ οπό όπου προκύπτει ότι $x\_{1}$ **= 26.66**

Άρα σωστό το (Α).

**Άσκηση 11**

Αρχικά πριν την απαλοιφή κάνουμε μια εναλλαγή γραμμών καθώς το 6.239> 0.003

$\left[\begin{array}{c}6.239-7.123\\0.003 55.23\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}x\_{1}\\x\_{2}\end{array}\right]$ **=** $\left[\begin{array}{c}47.23\\58.12\end{array}\right]$$⇒\left[\begin{array}{c}6.239-7.123\\0 55.23\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}x\_{1}\\x\_{2}\end{array}\right]$**=**$\left[\begin{array}{c}47.23\\58.10\end{array}\right]$

**Πίσω αντικατάσταση:**

**Βήμα 1ο :** $55.23\*x\_{2}= 58.10$ άρα $x\_{2}=1.052$

**Βήμα 2ο :** $6.239x\_{1}-7.123x\_{2}= 47.23$ οπό όπου προκύπτει ότι $x\_{1}$ **= 8.77?**

Άρα σωστό το (D).

**Άσκηση 12**

Η ορίζουσα του άνω τριγωνικού πίνακα που προκύπτει από την απαλοιφή Gauss είναι ίση με το γινόμενο των οριζουσών του L και U

Οπότε έχουμε: det(A) = det(L) \* det(U) = det(U) μιας και det(L) =1.

Άρα : det(U) = $\left(4.2857\*10^{7}\right)\*\left(0.037688\* 10^{7}\right)\*\left( -26.914\right)\*\left(0.05625\*10^{7}\right)=$

$$ =-2.445\* 10^{20}$$

Σωστή απάντηση το (D).

**Άσκηση 13**

**Κλασσική Μέθοδος Gauss**

**Βήμα 1ο  :**

$\left[\begin{array}{c}25 5 1 \\64 8 1\\144 12 1\end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{c}α\_{1}\\α\_{2}\\α\_{3}\end{array}\right]$= $ \left[\begin{array}{c}106.8\\177.2\\279.2\end{array}\right]⇒$

$\left[\begin{array}{c}25 5 1 \\0-\frac{24}{5}-\frac{39}{25}\\144 12 1\end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{c}α\_{1}\\α\_{2}\\α\_{3}\end{array}\right]$= $ \left[\begin{array}{c}106.8\\-\frac{12026}{125}\\279.2\end{array}\right]⇒$

$\left[\begin{array}{c}25 5 1 \\0-\frac{24}{5}-\frac{39}{25}\\0-\frac{84}{5}-\frac{119}{25}\end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{c}α\_{1}\\α\_{2}\\α\_{3}\end{array}\right]$= $ \left[\begin{array}{c}106.8\\-\frac{12026}{125}\\-\frac{41996}{125}\end{array}\right]⇒ βήμα 2ο $

**Βήμα 2ο  :**

$\left[\begin{array}{c}25 5 1 \\0-\frac{24}{5}-\frac{39}{25}\\0 0 \frac{7}{10}\end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{c}α\_{1}\\α\_{2}\\α\_{3}\end{array}\right]$= $ \left[\begin{array}{c}106.8\\-\frac{12026}{125}\\\frac{19}{25}\end{array}\right]$

**Πίσω αντικατάσταση:**

**Βήμα 1ο :** $0.7\*α\_{1}=\frac{19}{25}$ άρα $α\_{1}=\frac{38}{35}$

**Βήμα 2ο :** $-\frac{24}{5}α\_{2}-\frac{39}{25}α\_{3}= -\frac{12026}{125}$ οπό όπου προκύπτει ότι $α\_{2}$ **=** 827/42

**Βήμα 3ο :** 25$α\_{1}$+ $5α\_{2}+α\_{3}= 45$ άρα $α\_{3}=61/210$

Λύση του συστήματος είναι ο [Χ] = $\left[\begin{array}{c}\frac{38}{35}\\\frac{827}{42}\\\frac{61}{210}\end{array}\right]$ (περίεργες λύσεις???).

**Άσκηση 14**

**Κλασσική Μέθοδος Gauss**

**Βήμα 1ο  :**

$\left[\begin{array}{c}20 15 10 \\-3-2.249 7\\5 1 3\end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{c}x\_{1}\\x\_{2}\\x\_{3}\end{array}\right]$ = $ \left[\begin{array}{c}45 \\1.751\\9\end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{c}20 15 10 \\0 0.001 8.5\\5 1 3\end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{c}x\_{1}\\x\_{2}\\x\_{3}\end{array}\right]$ = $ \left[\begin{array}{c}45 \\8.501\\9\end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{c}20 15 10 \\ 0 0.001 8.5\\ 0 -2.75 0.5\end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{c}x\_{1}\\x\_{2}\\x\_{3}\end{array}\right]$ = $ \left[\begin{array}{c}45 \\8.501\\-2.25\end{array}\right]$

**Βήμα 2ο  :**

$\left[\begin{array}{c}20 15 10 \\ 0 0.001 8.5\\ 0 0 23375.5\end{array}\right] $ $\left[\begin{array}{c}x\_{1}\\x\_{2}\\x\_{3}\end{array}\right]$ = $ \left[\begin{array}{c}45 \\8.501\\ 23375.5\end{array}\right]$

**Πίσω αντικατάσταση:**

**Βήμα 1ο :** $23375.5\*x\_{3}= 23375.5$ άρα $x\_{3}=1.0$

**Βήμα 2ο :** $0.001x\_{2}+8.5x\_{3}= 8.501$ οπό όπου προκύπτει ότι $x\_{2}$ **=** 1.0

**Βήμα 3ο :** 20$x\_{1}$+ $15x\_{2}+10x\_{3}= 45$ άρα $x\_{1}=1.0$

Λύση του συστήματος είναι ο [Χ] = $\left[\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right]$ Διαφέρει όμως λόγω μιας ελάχιστης απόκλισης( απόκλιση δεν έχουμε σε περίπτωση αναπαράστασης 6 σημαντικών στοιχείων).

**Άσκηση 15**

Διαφέρει από την κλασσική εφαρμογή Gauss διότι σε αυτή την περίπτωση εφαρμόζουμε μερική οδήγηση στο 3ο βήμα , καθώς εναλλάσσονται οι γραμμές 2 και 3 ώστε στην θέση του οδηγού να έρθει ο μεγαλύτερος αριθμός (κατά απόλυτη τιμή) της 2ης στήλης.

**Άσκηση 16**

**Εκτός**

**Άσκηση 17**

Ήδη λυμένο με μερική οδήγηση στην 15(άσκηση χρησιμοποιεί το σύστημα ως παράδειγμα)?

**Άσκηση 18**

Συνδυάζοντας το 1ο , το 2ο και το 3ο θεώρημα που μας παρέχονται αντιλαμβανόμαστε ότι το det(A) =$(-1)^{k}\* \prod\_{i=1}^{n}[u\_{i,i }]$ όπου k ένας μετρητής που μετρά τις εναλλαγές γραμμών(3ο θεώρημα) , $u\_{i,i }$ τα στοιχεία της διαγωνίου του nxn πίνακα που θα προκύψει από τον Α (1ο θεώρημα) και $\prod\_{i=1}^{n}[u\_{i,i }]$ το γινόμενο όπως δίνεται στο 2ο θεώρημα.

Άρα χρησιμοποιώντας μερική οδήγηση έχουμε:

**Απαλοιφή με μερική οδήγηση:**

**Βήμα 1ο :**

$$\left[\begin{array}{c}10-7 0\\-3 2.099 6\\5-1 5\end{array}\right]⟹\left[\begin{array}{c}10-7 0\\0-\frac{1}{1000} 6 \\5-1 5\end{array}\right] ⟹\left[\begin{array}{c}10 -7 0\\0 -\frac{1}{1000} 6 \\0 \frac{ 5}{2} 5\end{array}\right]$$

**Βήμα 2ο :**

$\left[\begin{array}{c}10 -7 0\\0 -\frac{1}{1000} 6 \\0 \frac{ 5}{2} 5\end{array}\right]⟹\left[\begin{array}{c}10 -7 0\\0 \frac{5}{2} 5\\0 -\frac{1}{1000} 6\end{array} \right]⟹\left[\begin{array}{c}10 -7 0\\0 \frac{5}{2} 5\\0 0 3001/500\end{array} \right]$**= U**

Οπότε κάναμε μόνο μία εναλλαγή γραμμής άρα κ=1.Έτσι έχουμε:

Det(A) = $(-1)^{1}\*\left[10\*\frac{5}{2}\*\frac{3001}{500}\right]=-25\*\frac{3001}{500}=-150.05 $